

Phase estimation - opakování

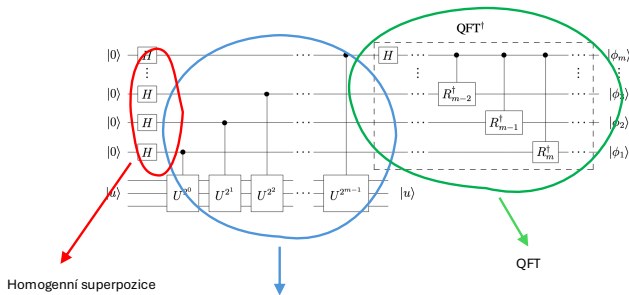
Libor Veis

- 1 Phase estimation
- 2 Iterative phase estimation

- Předpokládejme, že $|u\rangle$ je vlastní vektor $\hat{U}$ a že platí

$$\hat{U}|u\rangle = e^{2\pi i\phi}|u\rangle, \quad \phi \in (0, 1), \quad (1)$$

- ϕ je fáze odhadovaná algoritmem.



Kontrolovaná akce U

$$\frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} e^{2\pi i j \phi / 2^m} |j\rangle |u\rangle$$

- Ještě jednou se raději podíváme na druhou část, která je klíčová: controlled-U:
- Starting point

$$|\text{reg}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \left(|0\rangle + |1\rangle \right) \dots \left(|0\rangle + |1\rangle \right) |u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j\rangle |u\rangle \quad (2)$$

- Pro jednoduchost předpokládejme, že $m = 4$ a vezměme si jeden konkrétní stav $|j\rangle$ ze superpozice v rovnici (2)

$$|0101\rangle \rightarrow e^{2\pi i \phi \cdot 2^2} e^{2\pi i \phi \cdot 2^0} |0101\rangle = e^{2\pi i \phi (2^2 + 2^0)} |0101\rangle = e^{2\pi i \phi \cdot 5} |5\rangle \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} e^{2\pi i j \phi} |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} e^{2\pi i j \tilde{\phi} / 2^m} |j\rangle, \quad (4)$$

kde $\tilde{\phi} = 2^m \phi \dots$ celé číslo vyjádřené m bity

- QFT nám převede register do stavu $|\tilde{\phi}\rangle \Rightarrow$ měření.
- Pokud $|u\rangle$ neznáme (což je typicky případ v kvantové chemii), můžeme algoritmus zahájit s libovolným počátečním odhadem $|\psi\rangle$, který lze rozložit do báze vlastních vektorů operátoru $\hat{U}$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle. \quad (5)$$

- Pravděpodobnost měření ϕ_i je úměrná $|c_i|^2$.

Úloha 4

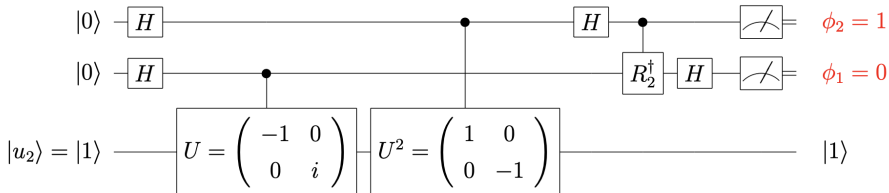
Uvažujte matici

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

pro kterou platí

#	eigenvalue	eigenvector	phase (ϕ)	binary representation of ϕ
1	$-1 = e^{i\pi}$	$ u_1\rangle = (1, 0)^T = 0\rangle$	0.5	$0.\phi_1\phi_2 = 0.10$
2	$i = e^{i\pi/2}$	$ u_2\rangle = (0, 1)^T = 1\rangle$	0.25	$0.\phi_1\phi_2 = 0.01$

Naimplementujte a vyzkoušejte v prostředí OpenQASM: <http://quantum.ibm.com/composer>
 algoritmus odhadu fáze podle následujícího obvodu



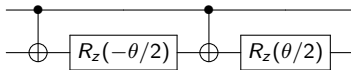
- Všechny kontrolované operace mají tvar controlled- R_z :

$$R_z(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Úloha 5

Ověřte, že $XR_z(\theta)X = R_z(-\theta)$.

- Nyní není složité pochopit, že následující kvantový obvod implementuje controlled- $R_z(\theta)$



Úloha 6

Ověřte, že U z úlohy 4 odpovídá až na globální fázi $R_z(-\frac{\pi}{2})$ a $R_z^\dagger$ odpovídá $R_z(-\pi)$. Vymyslete, co s touto globální fází v případě kontrolované operace.

- Pomocí semi-klasické QFT lze obvod PEA zjednodušit tak, že máme pouze jeden read-out qubit
- Algoritmus pak získává fázi iterativně - od nejméně významných bitů ϕ k těm nejvýznamnějším

